

Ejercicio 1 extraordinaria 2 curso 2021/22

Dado el sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema, usando el teorema de Rouché-Frobenius, según los valores del parámetro λ .

Empezamos calculando el rango de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda(-1-\lambda) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda = 0 \\ \searrow \lambda = -1 \end{matrix}$$

Si $\lambda = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Downarrow$

$$\text{rg}(A) = 3$$

Si $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 2 = 1 \neq 0$$

$\Downarrow$
 $\text{rg}(A) = 3$

Por tanto,

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 4 & \lambda \neq 0, -1 \\ 3 & \lambda = 0, -1 \end{cases}$$

Como el $\text{rg}(A|b)$ no puede ser mayor que 4 sabemos que si $\lambda \neq 0, -1$, su rango será 4 pues la matriz ampliada contiene a la matriz A como menor y hemos visto que en este caso su determinante es no nulo. Veamos ahora que ocurre si $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$:

$$\lambda = 0$$

$$A|b = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right| =$$

$$\downarrow \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_1$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2 + 2 + 2) \neq 0$$

$\Downarrow$
 $\text{rg}(A|b) = 4$

Si $\lambda = -1$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 2 \text{ filas} \\ \text{iguales.} \\ \Downarrow \\ \text{rg}(A|b) < 4 \end{matrix} = 0$$

y como ya sabemos que A tiene rango 3 en este caso y A es un menor de $A|b$
 $\Rightarrow \text{rg}(A|b) = 3$. Por tanto:

$$\text{rg}(A|b) = \begin{cases} 4 & \dots \lambda \neq -1 \\ 3 & \dots \lambda = -1 \end{cases}$$

Discusión: $\lambda \neq 0, -1 \Rightarrow \text{S.C.D. } (\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4)$
 $\lambda = 0 \Rightarrow \text{S.I. } (\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b))$
 $\lambda = -1 \Rightarrow \text{S.C.I. } (\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 < n^{\circ} \text{ incógn})$